# Gioco della diagonalizzazione

$V$ spazio vettoriale $f: V \to V$, $B$ base di $V$

Obiettivo: trovare una base $B$ di $V$ tale che $[M(f)]_B^B$ è diagonale

Strategia: $\mathcal{E}$ base di $V$, consideriamo $A = [M(f)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ base canonica

$P_A(\lambda) = 0$ polinomio caratteristico di $A$

$\det(A - \lambda \cdot id)$, troviamo le soluzione $\boxed{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ in $\mathbb{R}$ di $P_A(\lambda) = 0$ autovalori

$\forall i = 1 \dots r$ calcoliamo $\boxed{V_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda \cdot id)}$ autospazi

$\forall i = 1 \dots r$ troviamo una base $B_{\lambda_i}$ di $V_{\lambda_i}$

Se $\bigcup_{i=1}^{r} B_{\lambda_i} = B$ base di $V$ allora $[M(f)]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix}$

## Proposizione

$A$ matrice quadrata $P_A(\lambda)$ è invariante rispetto alla similitudine, cioè se $A' = B^{-1} \cdot A \cdot B$ allora $P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$

Corollario: $V$ spazio vettoriale, $f: V \to V$ endomorfismo
$B, B'$ basi di $V$, $A = [M(f)]_B^B$, $A' = [M(f)]_{B'}^{B'}$

$P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$

Ricordiamo: Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ allora $\deg P_A(\lambda) = n$ degree

Definizione: Se $A = [M(f)]_B^B$ allora $P_f(\lambda) = P_A(\lambda)$
Gli autovalori di $f$ sono i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$

**Proposizione**: gli autovalori di $F$ sono le soluzioni di $P_F(\lambda) = 0$

Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ allora

$P_f(\lambda) = n \Rightarrow$ Ci sono al più $n$ valori autovalori contati con la molteplicità algebrica molteplicità algebrica

$\lambda_1 \dots \lambda_n \quad m(\lambda_1) \dots m(\lambda_n) \Rightarrow m(\lambda_1) + \dots + \underbrace{m(\lambda_r)} \leq n$

$\dim V_{\lambda_i} = \rho(\lambda_i)$

molteplicità geometrica

**Proposizione** $f: V \to V$ endomorfismo, $\dim V = n$ $\lambda_1 \dots \lambda_r$ autovalori, $B_{\lambda_i}$ base di $V_{\lambda_i}$ $f$ è diagonalizzabile

$\Updownarrow$

$B = \bigcup_{i=1}^{r} B_{\lambda_i}$ è una base di $V$

**Dimostrazione**

" $\Leftarrow$ "

cardinalità

$B = \bigcup_{i=1}^{r} B\lambda_i$ base di $V \Rightarrow \# B = n = \sum_{i=1}^{r} \# B_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{r} \rho(\lambda_i)$

$\{ b^1_1, \dots b^1_{\rho(\lambda_1)}, b^2_1 \dots b^2_{\rho(\lambda_2)}, b^n_1, \dots b^n_{\rho(\lambda_r)} \} = B$

$f(b^1_1) = \lambda_1 b^1_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(b^1_2) = \lambda_1 b^1_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left[ M(f) \right]^B_B = \begin{Bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_1 & & & 0 & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & 0 & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_r \end{Bmatrix}$$

" $\Rightarrow$ "

$f$ diagonalizzabile $\Rightarrow \exists\, B$ t.c

$$[M(f)]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

riordiniamo la base in modo da mettere i $\lambda_i$ uguali uno dopo l'altro

$$\Rightarrow [M(f)]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Avente $\rho(\lambda_i)$ entrate uguali e $\lambda_i$ con $i = 1 \dots r$

$B_{\lambda_1} = \{b_1 \dots b_{\rho(\lambda_1)}\}$ $\quad B_{\lambda_2} = \{b_{\rho(\lambda_1)+1} \dots b_{\rho(\lambda_i)}\}$

basi degli autospazi

Se vogliamo capire se una matrice è diagonalizzabile come facciamo? e quindi come risparmio tempo?

**Proposizione** $f: V \to V$ endo e $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di $F$

Allora $\quad 1 \leq \rho(\lambda) \leq m(\lambda)$

**Teorema** $f: V \to V$ $f$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \lambda_1 \dots \lambda_r$ autovalori con $\sum_{i=1}^{r} m(\lambda_i) = n$ e $\forall i = 1 \dots r$ $\rho(\lambda_i) = m(\lambda_i)$

**Osservazione**

$f: V \to V$ $\quad \lambda_1, \lambda_2$ autovalori distinti di $f$

$$V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$$

$$\underset{\lambda_2 V}{\overset{\shortparallel}{f(v)}} = \lambda_1 V \Rightarrow \lambda_1 V = \lambda_2 V \to \lambda_1 V - \lambda_2 V = 0 \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} V = 0 \Downarrow V = 0$$

$f$ diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$

Corollario riassuntivo:

$V$ spazio vettoriale $f: V \to V$ endo $\lambda_1 \dots \lambda_r$ autovalori (distinti)

Le seguenti sono equivalenti:

i) $f$ è diagonalizzabile

ii) $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$

iii) $\dim V = \sum_{i=1}^{r} \rho(\lambda_i)$

IV) $P(\lambda) = 0$ ha tutte le radici in $\mathbb{R}$ e $\forall i = 1 \dots r$

$m(\lambda_i) = \rho(\lambda_i)$

Esempi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \to \det(A - \lambda\, id_2) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda(4-\lambda) + 4 = (\lambda-2)^2 \quad \lambda = 2 \quad m(\lambda) = 2$$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$V_2 = \ker(A - 2 \cdot id) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(2) = 1$$

dim Ker

A non è diagonalizzabile perché $m(\lambda) \neq \rho(2)$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(A - \lambda \cdot id_2) = \det\begin{pmatrix} -5-\lambda & 8 \\ -4 & 7-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(-5-\lambda)(7-\lambda) + 32 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \Rightarrow (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

$\lambda = 3, -1 \qquad m(3) = 1 \qquad m(-1) = 1$

se tutte le radici sono semplici è diagonalizzabile

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3 \quad \ker\begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \{ x = y = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$= V_3$

$$\boxed{\lambda = -1} \quad \ker\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{ x = 2y = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$= V_{-1}$

la base che diagonalizza è $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot A \cdot B$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endo definito da

$f(v_1) = h \cdot v_1$, $f(v_2) = (h-2)v_1 + 2v_2$

$f(v_3) = (2h+4)v_1 + 4v_2 - 2v_3$ con $h \in \mathbb{R}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di $h$ la funzione $f$ è diagonalizzabile?

$v_1, v_2$ e $v_3$ sono una base?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rk = 3 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\} \text{ l.i.}$$

e quindi una base

$$A = [M(f)]_B^B = \begin{pmatrix} h & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda\, id_3) = \det\begin{pmatrix} h-\lambda & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 2-h & 4 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (h-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

$\lambda = h, 2, -2 \Rightarrow h \neq \pm 2 \Rightarrow f$ è diagonalizzabile

$\boxed{h = 2} \Rightarrow m(2) = 2$, $m(-2) = 1$

$\boxed{\lambda = 2}$ $\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ $rk = 1$ $\dim \ker = 3-1 = \rho(2)$

$\underbrace{2}_{h} - \underbrace{2}_{\lambda}$

$\Downarrow$

$f$ è diagonalizzabile

$\boxed{h = -2} \Rightarrow m(2) = 1$, $m(-2) = 2$

$\boxed{\lambda = -2}$ $\ker \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r = 2$ $\dim \ker = 3-2 = 1$

$= \rho(-1) \neq m(-2)$

non è diagonalizzabile

$f$ diag $\forall h \in \mathbb{R} = \{-2\}$

Per i valori per cui $f$ è diag. trovare la matrice diag.

$h \neq \pm 2 \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

trovare una base per i valori per cui $f$ è diagonalizz.

$\boxed{\lambda = 2}$ $\quad \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} h-2 & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

per $h \neq \pm 2$ $\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rk = 2$

$\rightsquigarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = V_2$

$\lambda \neq -2 \quad \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} h+2 & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rk = 2$

$h \neq \pm 2 \quad \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & \frac{h-2}{h+2} & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-\frac{h-2}{h+2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{cases} x = -2 + \frac{h-2}{h+2} \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow V_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} -2+\frac{h-2}{h+2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= \begin{pmatrix} \frac{-h-6}{h+2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_h = \langle V_1 \rangle$ $\quad V_2 = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ $\quad V_{-2} = \langle \begin{pmatrix} -\frac{h-6}{h+2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$